Umkehrfunktion - Lösung

1. Sind folgende drei Funktionen umkehrbar? Begründe! Wenn nicht, schränke den Definitionsbereich ein, sodass sie umkehrbar werden.

Graph 1: Nein, sie ist nicht umkehrbar, da es z.B. zu y= - 2 zwei x-Werte gibt mit f(x) = -2.

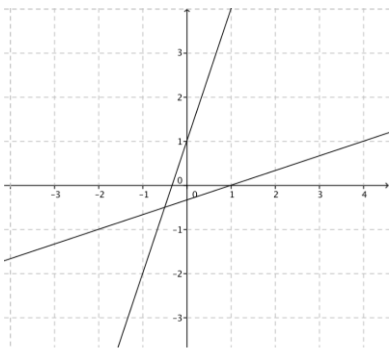
Einschränkung: $D = R_0^+$

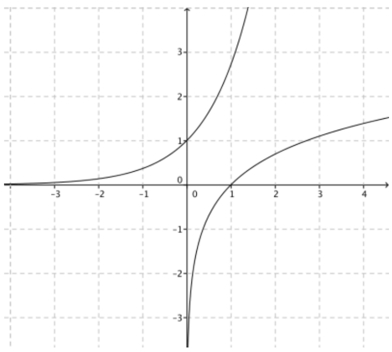
Graph 2: Ja, die Funktion ist umkehrbar, da es für jedes y der Wertemenge genau ein x gibt mit f(x) = y.

Graph 3: Nein, die Funktion ist nicht umkehrbar, da es z.B. für y = 0,5 zwei x-Werte gibt mit f(x) = 0,5. Einschränkung: $D = [1;\infty[$

2. Skizziere jeweils die Umkehrfunktion in das Koordinatensystem.

→ Spiegelung an y = x





3. Überprüfe durch Rechnung, ob folgende Funktionen umkehrbar sind.

a) $f'(x) = 9x^2 + 1 > 0$ => f str. mon. steigend => umkehrbar

b) $f'(x) = \dfrac{0 - 2\cdot(2x)}{(x^2-1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$f'(-1) > 0$

$f'(1) < 0$

$=> Maximum$

⇨ f nicht umkehrbar, da es in einer Umgebung des Maximums für ein y zwei x gibt mit f(x) = y

c) $f'(x) = \frac{(x-4)\cdot 3 - 3x\cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{3x-12-3x}{(x-4)^2} = \frac{-12}{(x-4)^2}$

$f'(x) < 0$

=> f str. mon. fallend => umkehrbar

d) $f'(x) = 2ax + a$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2ax + a = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

1.Fall: a > 0 : $f'(-1) = -2a + a = -a < 0$; $f'(0) = a > 0$; $=> Minimum$

2.Fall: a < 0 : $f'(-1) = -2a + a = -a > 0$; $f'(0) = a < 0$; $=> Maximum$

⇨ f nicht umkehrbar, da es in einer Umgebung des Minimums/Maximums für ein y zwei x gibt mit f(x) = y

4. Bilde von folgenden Funktionen die Umkehrfunktion.

a) $y = \frac{3}{x-1}$; $y(x-1) = 3$; $yx - y = 3$; $yx = 3 + y$; $x = \frac{3+y}{y}$ => $f^{-1}(x) = \frac{3+x}{x}$

b) $y = (x-4)^2$; $\pm\sqrt{y} = x - 4$; $\pm\sqrt{y} + 4 = x$

$x \geq 4$ => $\sqrt{y} + 4 = x$ => $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 4$

c) $y = 5 - \frac{7}{x}$; $(y-5)x = -7$; $x = \frac{-7}{y-5}$ => $f^{-1}(x) = \frac{-7}{x-5}$

d) $y = \sqrt{ax+1}$; $y^2 = ax + 1$; $\frac{y^2-1}{a} = x$ => $f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{a}$

5. Gib jeweils Definitionsmenge und Wertemenge der Umkehrfunktion von f an.

Um die Wertemenge einer Funktion zu bestimmen, skizziert man am besten ihren Graphen. Bei a) kann man sich z.B. überlegen, dass die Funktion aus der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ entstanden ist und nur in x-Richtung verschoben und in y-Richtung gestreckt wurde. Aufgabe b) behandelt eine Parabel in Scheitelform. Usw....

a) $f(x) = \frac{3}{x-5}$ $\quad x > 5$ => $D_f = W_{f^{-1}} =]5;\infty[$; $W_f = D_{f^{-1}} = R^+$

b) $f(x) = (x-2)^2 + 1$ $\quad x \geq 2$ => $D_f = W_{f^{-1}} = [2;\infty[$; $W_f = D_{f^{-1}} = [1;\infty[$

c) $f(x) = \frac{2x-3}{x-5}$ $\quad x < 5$ => $D_f = W_{f^{-1}} =]-\infty;5[$; $W_f = D_{f^{-1}} =]-\infty;2[$

d) $f(x) = t\cdot x^2 + 1$; $x > 0$, $t \neq 0$ => $D_f = W_{f^{-1}} = R^+$;

1.Fall: t > 0 : $W_f = D_{f^{-1}} = [1;\infty[$ 2.Fall: t < 0 : $W_f = D_{f^{-1}} =]-\infty;1]$