Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs – Lösung

1. Untersuche das Verhalten der folgenden Funktionen für $x \to \pm\infty$ und gib gegebenenfalls die Gleichung der Asymptote an:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{3}{+\infty} = \underline{\underline{0^+}}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{3}{+\infty} = \underline{\underline{0^+}}$, da ZG < NG, also $\underline{\underline{y=0}}$.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x-4}{3x+5} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$, da ZG = NG, also $\underline{\underline{y=\frac{2}{3}}}$

c)
$$\begin{array}{l}
(2x^2-3x+4):(x+1) = 2x-5-\frac{9}{x+1} \\
\underline{-(2x^2+2x)} \\
\quad -5x+4 \\
\quad \underline{-(-5x-5)} \\
\qquad -9
\end{array}$$
, also $\underline{\underline{y=2x-5}}$

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5x-2x^2+7}{4x^2-4} = \frac{-2}{4}\ \underline{\underline{-0{,}5}}$, da ZG = NG, also $\underline{\underline{y=-0{,}5}}$

2. Untersuche das Verhalten der Funktionen an den Grenzen ihres jeweiligen Definitionsbereiches:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^4-4}{x-1} = \underline{\underline{+\infty}}$, „$\infty$“ da ZG >> NG; „+“ da Vorzeichen $\frac{+}{+}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^4-4}{x-1} = \underline{\underline{-\infty}}$, „$\infty$“ da ZG >> NG; „–“ da Vorzeichen $\frac{+}{-}$

$\lim\limits_{x\to1^+} \frac{2x^4-4}{x-1} = \frac{-2}{0^+} = \underline{\underline{-\infty}}$, $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{2x^4-4}{x-1} = \frac{-2}{0^-} = \underline{\underline{+\infty}}$

b) $f(x) = \frac{x^2+7}{x^2(5-x)}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+7}{x^2(5-x)} = \underline{\underline{0}}$, da ZG < NG

$\lim\limits_{x\to0^\pm} \frac{x^2+7}{x^2(5-x)} = \frac{7}{0^+} = \underline{\underline{+\infty}}$, $\lim\limits_{x\to5^+} \frac{x^2+7}{x^2(5-x)} = \frac{32}{0^-} = \underline{\underline{-\infty}}$,

$\lim\limits_{x\to5^-} \frac{x^2+7}{x^2(5-x)} = \frac{32}{0^+} = \underline{\underline{+\infty}}$

3. Untersuche das Verhalten der folgenden Funktionen für $x \to \pm\infty$ und gib gegebenenfalls die Gleichung der Asymptote an:

a)
$$\begin{array}{l} \left(2x^4-4x^2+6\right):\left(x^3-5x^2+3\right)=2x+10+\frac{46x^2-6x-30}{x^3-5x^2+3} \\ \underline{-\left(2x^4-10x^3+6x\right)} \\ \qquad 10x^3-4x^2-6x \\ \qquad \underline{-\left(10x^3-50x^2+30\right)} \\ \qquad\qquad 46x^2-6x-30 \end{array}$$

; also $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)= \underline{\underline{2x+10}}$

b) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-3)^2(2-5x)(4-x)^2}{x^2(3x-6)(x+1)^2}=\frac{-5x^5}{3x^5}=\underline{\underline{-\frac{5}{3}}}$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-2\right)\left(5-x^3\right)}{4-x^2}=\underline{\underline{+\infty}},$$ „∞“ da ZG >> NG; „+“ da Vorzeichen $\frac{(+)\cdot(-)}{-}=+$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2-2\right)\left(5-x^3\right)}{4-x^2}=\underline{\underline{-\infty}},$$ „∞“ da ZG >> NG; „–“ da Vorzeichen $\frac{(+)\cdot(+)}{-}=-$

4. Untersuche das Verhalten der Funktionen an den Grenzen ihres jeweiligen Definitionsbereiches:

a) $$f(x)=\frac{(3-2x)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{3-2x}{x+2}$$ $$\left(\lim_{x\to 2}\frac{3-2x}{x+2}=\frac{-1}{4}=\underline{\underline{-\frac{1}{4}}}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3-2x}{x+2}=\underline{\underline{-2}},$$ da ZG = NG;

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{3-2x}{x+2}=\frac{7}{0^+}=\underline{\underline{+\infty}},\quad \lim_{x\to-2^-}\frac{3-2x}{x+2}=\frac{7}{0^-}=\underline{\underline{-\infty}}$$

c) $$f(x)=\frac{x(x-2)(x+1)}{(3+x)(3-x)};\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^2-2x}{9-x^2}=\underline{\underline{-x+1}},$$ da

$$\begin{array}{l} \left(x^3-x^2-2x\right):\left(-x^2+9\right)=-x+1-\frac{2x}{x^2-9} \\ \underline{-\left(x^3-9\right)} \\ \qquad -x^2-2x+9 \\ \qquad \underline{-\left(-x^2+9\right)} \\ \qquad\qquad -2x \end{array}$$

$$\lim_{x\to-3^+}\frac{x(x-2)(x+1)}{(3+x)(3-x)}=\frac{-30}{0^+}=\underline{\underline{-\infty}},\quad \lim_{x\to-3^-}f(x)=\underline{\underline{+\infty}},$$ da Polstelle mit VZW.

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x(x-2)(x+1)}{(3+x)(3-x)}=\frac{12}{0^-}=\underline{\underline{-\infty}},\quad \lim_{x\to 3^-}f(x)=\underline{\underline{+\infty}},$$ da Polstelle mit VZW.