Lagebeziehung Geraden-Geraden - Lösungen

1. a) $g = h$ setzen: $\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$

   (1) $-3 + t = 4 - 3s$
   (2) $1 + 3t = 1 - 2s$
   (3) $2 - t = 1 + s \quad \rightarrow \quad s = 1 - t$

   In (1): $-3 + t = 4 - 3 + 3t \quad \rightarrow \quad t = -2$
   In (2): $1 + 3t = 1 - 2 + 2t \quad \rightarrow \quad t = -2$ d.h. die Geraden schneiden sich!

   Schnittpunkt (t einsetzen): $\boldsymbol{S(-5|-5|4)}$

   b) z.B.: $E: \vec{X} = \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$

2. Untersuche die beiden Geraden g und h jeweils auf ihre gegenseitige Lage und berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt:
   a) Die Geraden liegen **windschief**.
   b) Die Geraden schneiden sich in $\boldsymbol{S(1|-1|-1)}$
   c) Die Geraden liegen **echt parallel**.

3. a) Gleichsetzen und k bestimmen: $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\7\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\k\\3\end{pmatrix}$.

   (1) $3 + r = 2 - s \quad \rightarrow \quad r = -s - 1$ in (3)
   (2) $1 + 2r = 7 + sk$
   (3) $-r = 5 + 3s$

   (3*) $s + 1 = 5 + 3s \quad \rightarrow \quad s = -2, r = 1$, beides in (2)
   (2*) $3 = 7 - 2k \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k = 2, \;\; P(4|3|-1)}$

   b) $RV_{AB}: \vec{A} - \vec{B} = \begin{pmatrix}2\\a-2\\-2\end{pmatrix}$ soll lin. abh. von $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ sein. Mit $2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a = 6}$

4. a) Parallel: $r \cdot \begin{pmatrix} 2k \\ k \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. D.h. $r = -2$ (dritte Zeile). $(-2) \cdot \begin{pmatrix} 2k \\ k \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4k \\ -2k \\ 2 \end{pmatrix}$.

(1) $-4k = 2$

(2) $-2k = -1$

Geht nicht → **Parallelität nicht möglich!**

b) Windschief: RV_{g_k}, RV_h, $AP_h - AP_{g_k}$ sind linear unabhängig voneinander.

$$\begin{vmatrix} 2k & 2 & 1 \\ k & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4k + 2k + 2 - 1 + 4k - 4k = -2k + 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{k \neq 0,5}$$

c) D.h. die Geraden schneiden sich, wenn sich bei obiger Rechnung lineare Abhängigkeit ergibt.

→ $\boldsymbol{k \neq 0,5}$